ALGEBRA

Rechnen mit Beträgen

Teil 2

Betragsungleichungen lösen

Datei 12161

Stand: 9. Februar 2019

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Dieser Text setzt voraus, dass man die Definition des Betrages kennt, und dass man einfache lineare Betragsgleichungen lösen kann, was im Text 12610 gezeigt wird.

Folgende Texte zu Ungleichungen und Beträgen gibt es derzeit auf der Mathematik-CD:

12150	Lineare Ungleichungen mit 1 Variablen, Doppelungleichungen, Oder-Verknüpfung
12160	Beträge, Lineare und quadratische Betragsgleichungen
12161	Lineare Betragsungleichungen mit 1 Variablen
12162	Betrags(un)gleichungen – schwere Aufgaben
12190	Lineare Ungleichungen mit 2 Variablen
12270	Quadratische Ungleichungen
12272	Bruch-Ungleichungen
41005	Ungleichungen beweisen
41006	Ungleichungen mit ln und e lösen
41008	Betrags(un)gleichungen anwenden
41021	Lineare Betragsfunktionen
41022	Quadratische Betragsfunktionen
41023	Gebrochen rationale Betragsfunktionen

Inhalt

1 Betrags-Kleiner-Ungleichungen 3
2 Betrags-Größer-Ungleichungen 6
3 Lernblatt 8
Tipps 9
Übersicht 10
Lösung der Trainingsaufgaben 11

1 Betrags-Kleiner-Ungleichungen - ausführlich

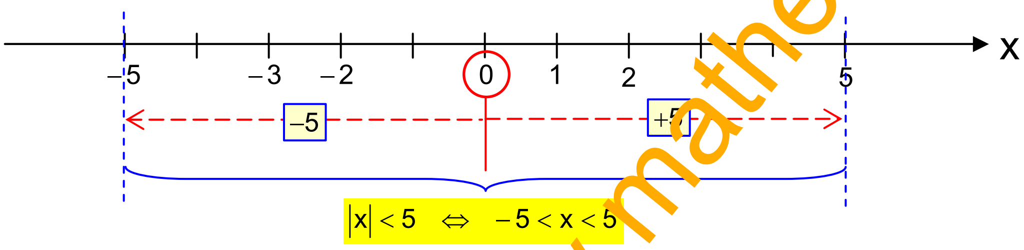
Beispiel 1: $|x| < 5$

Die Gleichung $|x| = 5$ fragt nach Zahlen, die den Betrag 5 haben, also deren Abstand von 0 gleich 5 ist. Dies sind die Zahlen 5 und -5.

Die Ungleichung $|x| < 5$ sucht nun nach Zahlen, deren Betrag kleiner als 5 ist, deren Abstand von 0 also kleiner als 5 ist. Das sind die Zahlen zwischen -5 und 5,

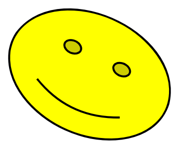
was man auch so schreiben kann: $-5 < x < 5$.

Die Lösungsmenge ist das offene Intervall $\mathbf{L} =]-5;5[$



Das kann man verallgemeinern:

MERKE: Die Betrags-Kleiner-Ungleichung $|x| < r$ kann man als **Doppelungleichung** schreiben: $-r < x < r$.
Sie hat die Lösungsmenge $\mathbf{L} =]-r;r[$.



Beispiel 2: $|x| < 25 \quad \Leftrightarrow \quad -25 < x < 25 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{L} =]-25;25[$

In der folgenden Ungleichung sind auch noch Zahlen zugelassen, für die das Gleichheitszeichen gilt. Daher zeigen die Klammern der Lösungsmenge nach innen, ± 13 gehören nämlich dazu.

Beispiel 3: $|x| \leq 13 \quad \Leftrightarrow \quad -13 \leq x \leq 13 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{L} = [-13;13]$

Dasselbe Verfahren kann man anwenden, wenn das Argument komplizierter ist:

Beispiel 4

$|x-4|<3$

Als Textaufgabe lautet diese Ungleichung so: Welche Zahlen haben von 4 einen Abstand, der kleiner als 3 ist. Wir argumentieren genau wie zuvor und sagen:
Dann muss x - 4 zwischen -3 und 3 liegen. Der Rechenweg sieht so aus:

$|x-4|<3$ — In eine Doppelungleichung verwandeln:

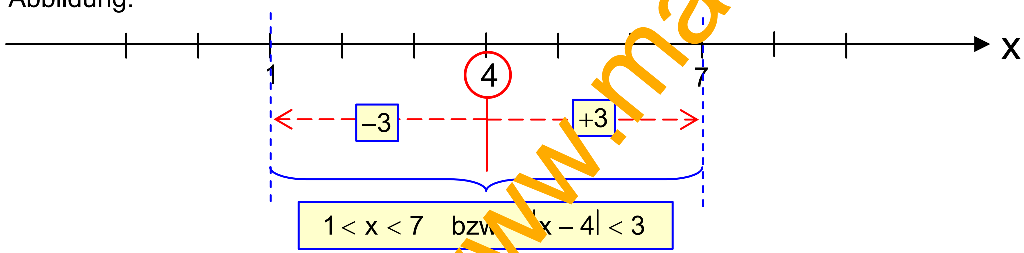
$-3<x-4<3$ — Dreimal die 4 addieren:

$-3\boxed{+4}<x-4\boxed{+4}<3\boxed{+4}$ — Zusammenfassen:

$1<x<7$

$\mathbf{L}=\,]\,1,7\,[\,.$

Dazu diese Abbildung:



Beispiel 5:

$|x+8|\le 17$

Als Textaufgabe lautet diese Ungleichung so: Welche Zahlen haben von $\boxed{-8}$ einen Abstand, der höchstens 17 ist. Der Rechenweg sieht so aus:

$|x+8|\le 17$ — In eine Doppelungleichung umwandeln:

$-17\le x+8\le 17$ — Dreimal 8 subtrahieren:

$-25\le x\le 9$ — Lösungsmenge: $\mathbf{L}=[\,-25\,;9\,]$

MERKE: Die **Betrags-Kleiner-Ungleichung** $|x-a|<r$ kann man auch als **Doppelungleichung** schreiben: $-r<x-a<r$. | +a

Daraus folgt: $a-r<x<a+r$

Die Lösungsmenge ist daher: $\mathbf{L}=\,]\,a-r\,;a+r\,[$

Dies klappt auch mit beliebigen linearen Betrags-Kleiner-Ungleichungen

Beispiel 6

$\lvert 3x+2\rvert \le 26$	In eine Doppelungleichung verwandeln:
$-26 \le 3x+2 \le 26$	Dreimal (-2) addieren:
$-28 \le 3x \le 24$	Dreimal durch 3 dividieren:
$-\frac{28}{3} \le x \le 8$	ergibt $\mathbf{L} = \left[-\frac{28}{3} ; 8 \right]$

Beispiel 7

$\lvert \frac{1}{2}x - 5\rvert < \frac{3}{2}$	
$-\frac{3}{2} < \frac{1}{2}x - 5 < \frac{3}{2}$	$\mid +5$
$\frac{7}{2} < \frac{1}{2}x < \frac{13}{2}$	$\mid \cdot 2$
$7 < x < 13$	ergibt $\mathbf{L} = \left] 7 ; 13 \right[$

Beispiel 8

$\lvert 5-2x\rvert \le 11$	Argument vertauschen
$\lvert 2x-5\rvert \le 11$	
$-11 \le 2x-5 \le 11$	$\mid +5$
$-6 \le 2x \le 16$	$\mid :2$
$-3 \le x \le 8$	ergibt $\mathbf{L} = \left[-3 ; 8 \right]$

Beispiel 9

$\lvert -2x-5\rvert < 1$	Achtung: $\lvert -2x-5\rvert = \lvert -1\cdot(2x+5)\rvert = \lvert 2x+5\rvert$
$\lvert 2x+5\rvert < 1$	
$-1 < 2x+5 < 1$	$\mid -5$
$-6 < 2x < -4$	$\mid :2$
$-3 < x < -2$	ergibt $\mathbf{L} = \left] -3 ; -2 \right[$

Trainingsaufgabe 1

Berechne die Lösungsmengen:

a)	$\lvert x\rvert < 20$	b)	$\lvert x-20\rvert < 6$	c)	$\lvert x-6\rvert \le 20$
d)	$\lvert x+6\rvert < 20$	e)	$\lvert x+1\rvert \le 4$	f)	$\lvert x+\frac{3}{4}\rvert < \frac{7}{2}$
g)	$\lvert \frac{1}{2}x\rvert < 4$	h)	$\lvert 2x-3\rvert \le 3$	i)	$\lvert \frac{5}{2}x+1\rvert \le 2$

2 Betrags-Größer-Ungleichungen - ausführlich

Beispiel 10

$$|x-2| > 15$$

Dieses Beispiel wurde in Abschnitt 1 ausführlich besprochen. Es beschreibt einen Außenbereich, der aus einem linken und einem rechten Intervall besteht. Die Ungleichung sucht Zahlen, deren Abstand von 2 größer als 15 ist.
Hier der ausführliche Lösungsweg:

$\lvert x-2\rvert > 15$	**Aufspalten in zwei Ungleichungen:**
$x-2<-15 \quad \vee \quad x-2>15$	Zweimal 2 addieren:
$x<-13 \quad \vee \quad x>17$	Lösungsmenge: $\mathbf{L} = \left]-\infty; -13\right[\cup \left]17; \infty\right[$
	Oder so: $\mathbf{L} = \mathbb{R} \setminus [-13; 17]$.

Man muss sich dieses Verfahren gut merken:

Die linke Ungleichung beschreibt den linken Außenbereich, daher benötigt sie < -15.

Die rechte Ungleichung beschreibt den rechten Außenbereich, daher benötigt sie > +15.

Wer diesen Unterschied nicht weiß, kommt nicht zum Ergebnis.

Das Zeichen $\vee$ liest man „oder“. Zwischen den Ungleichungen steht „oder“ bzw. $\vee$, und zwischen den beiden Intervallen der Lösungsmenge das Vereinigungszeichen $\cup$. Auch hier darf man nichts verwechseln.

Beispiel 11

$$|x| \geq 5$$

Diese Ungleichung ist viel einfacher. Am Lösungsweg ändert sich nichts:

$\lvert x\rvert \geq 5$	Aufspalten in zwei Ungleichungen:
$x \leq -5 \quad \vee \quad x \geq 5$	Lösungsmenge: $\mathbf{L} = \left]-\infty; -5\right] \cup \left[5; \infty\right[= \mathbb{R} \setminus \left]-5; 5\right[$.

Man achte auf den Gebrauch der eckigen Klammern!!!

Beispiel 12

$$|x+36| > 54$$

Welche Zahlen haben von -36 einen Abstand, der größer als 54 ist?

$\lvert x+36\rvert > 54$	Aufspalten in zwei Außenbereiche:
$x+36<-54 \quad \vee \quad x+36>54$	$\mid -36$
$x<-90 \quad \vee \quad x>18$	$\mathbf{L} = \left]-\infty; -90\right[\cup \left]18; \infty\right[= \mathbb{R} \setminus [-90; 18]$

Trainingsaufgabe 2

Berechne die Lösungsmengen:

a)	$\lvert x\rvert > 8$	b)	$\lvert x\rvert \geq \frac{9}{2}$	c)	$\lvert x\rvert > -2$
d)	$\lvert x-1\rvert > 9$	e)	$\lvert x-9\rvert \geq 1$	f)	$\lvert 6-x\rvert > 6$
g)	$\lvert x+5\rvert \geq 12$	h)	$\lvert x+17\rvert > 34$	i)	$\lvert x+3\rvert \geq 8$

Trainingsaufgabe 3

Jetzt werden alle Typen bunt gemischt abgefragt, das ist das beste Training, um die verschiedenen Methoden auseinander zu halten. Bestimme die Lösungsmengen zu diesen Betrags-(und)Gleichungen.

a)	$\lvert x-23\rvert < 14$	b)	$\lvert x\rvert \geq 18$	c)	$\lvert x+3\rvert = 27$
d)	$\lvert 6-x\rvert \leq 7$	e)	$\lvert x+5\rvert < -5$	f)	$\lvert x+3\rvert > 1$
g)	$\lvert -x-4\rvert = 8$	h)	$\left\lvert \frac{1}{2}x+3\right\rvert \geq \frac{3}{2}$	i)	$\lvert 4x-6\rvert = 0$
j)	$\lvert 4-x\rvert < 4$	k)	$\lvert 5x-3\rvert > 7$	l)	$\lvert x^2-20\rvert = 4$
m)	$\lvert x-50\rvert \leq 10$	n)	$\lvert x^2-6x\rvert = 8$	o)	$\lvert 7x-4\rvert \geq 10$

Auf der nächsten Seite folgt eine Übersicht über alle Methoden!

3 Lernblatt

Die Erfahrung zeigt, dass Schüler nach kurzer Zeit diese drei verschiedenen Lösungsverfahren durcheinander bringen und unsinnige Dinge aufschreiben.
Daher hier nochmals eine Übersicht und am Ende einige Tipps.

Grundaufgabe 1	Grundaufgabe 2	Grundaufgabe 3
$\lvert x-a\rvert = r$	$\lvert x-a\rvert < r$	$\lvert x-a\rvert > r$
$x-a=\pm r$	$-r < x-a < r$	$x-a<-r \vee x-a>r$
$x_{1,2}=a\pm r$	$a-r<x<a+r$	$x<a-r \vee x>a+r$
$L=\{a\pm r\}$	$L=\,]a-r;a+r[$	$L=\mathbb{R}\setminus[a-r;a+r]$
2 „Punkte“	*„Innenbereich“*	*„Außenbereich“*

Tipps:

1. Man sollte sich die Stichworte „Innenbereich“ bzw. „Außenbereich“ merken und den Betrag stets mit der Abstandsberechnung in Zusammenhang bringen.

2. Ist a eine negative Zahl, etwa a = - 7, dann sehen die drei Aussageformen anders aus, die Methode bleibt aber gleich: Beispiel:
   $\lvert x+7\rvert = 4$ oder $\lvert x+7\rvert < 4$ oder $\lvert x+7\rvert > 4$
   Also merken: Hier geht es um den Abstand zur Zahl - ..

Abschließend drei Zahlenbeispiele dazu, jetzt mit $\geq$ und $\leq$:

Beispiel 13	Beispiel 14	Beispiel 15
$\lvert x-6\rvert = 8$	$\lvert x-6\rvert \leq 8$	$\lvert x-6\rvert \geq 8$
$x-6=\pm 8$	$-8\leq x-6\leq 8$	$x-6\leq -8 \vee x-6\geq 8$
$x_{1,2}=6\pm 8$	$-2\leq x\leq 14$	$x\leq -2 \vee x\geq 14$
$\mathbf{L}=\{-2;14\}$	$\mathbf{L}=[-2;14]$	$\mathbf{L}=\,]-\infty;-2]\cup[14;\infty[$
		oder $\mathbf{L}=\mathbb{R}\setminus\,]-2;14[$

Nur bei der Betrags<u>gleichung</u> darf man mit $\pm$ arbeiten, die Lösungsmenge enthält dann genau zwei Zahlen.
Bei der Betrags-Kleiner-Ungleichung kommt man über die Doppelungleichung zu einem Lösungsintervall.
Bei der Betrags-Größer-Ungleichung erhält man zwei durch „oder“ getrennte Ungleichungen für die Außenbereiche, deren Lösungsmengen man dann vereinigen muss.

Hier noch einige Tipps zu diesem Thema:

Tipp 1: Die Ungleichungen $\left|x-7\right|=-2$ oder $\left|x-7\right|<-2$ haben keine Lösung, denn ein Betrag ist nie negativ.

Dagegen hat $\left|x-7\right|>-2$ durchaus eine Lösung, denn der Betrag jeder Zahl ist größer als -2. Hier passen alle reellen Zahlen, also ist **L = R !**

Tipp 2: $\left|4-x\right|=8$ ist dasselbe wie $\left|x-4\right|=8$

Man darf in einem Betragsargument stets den Faktor -1 dazu bringen!

$\left|4-x\right|=\left|x-4\right|$ oder $\left|-x-5\right|=\left|x+5\right|$ usw.

Also: $\left|\frac{5}{4}-\frac{1}{2}x\right|=3$ Im Argument vertauschen:

$\left|\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}\right|=3$ ergibt $\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}=\pm 3$ und daraus folgt:

$$\frac{1}{2}x=\frac{5}{4}\pm 3=\frac{5}{4}\pm\frac{12}{4}=\begin{cases}\frac{17}{4}\\ -\frac{7}{4}\end{cases}$$

1. Fall: $\frac{1}{2}x=\frac{17}{4} \quad |\cdot 2 \quad \Rightarrow \quad x_1=\frac{17}{2}$

2. Fall: $\frac{1}{2}x=-\frac{7}{4} \quad |\cdot 2 \quad \Rightarrow \quad x_2=-\frac{7}{2}$

Lösungsmenge: $L=\left\{-\frac{7}{2}\,;\,\frac{17}{2}\right\}$

Übersicht

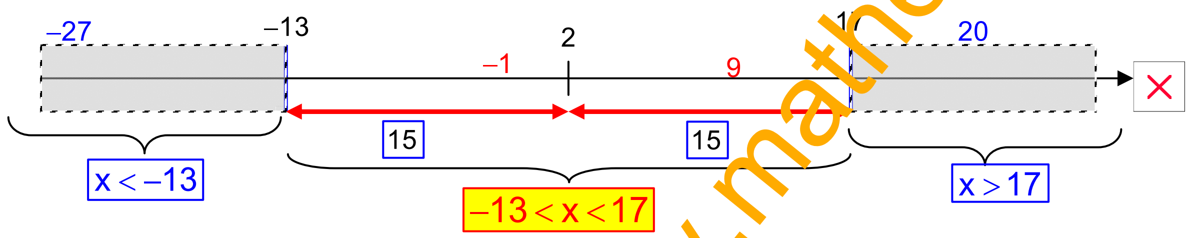
Zum Berechnen von Abständen auf dem Zahlenstrahl ist im Text 12610 der Betrag einer Zahl eingeführt worden. Den Abstand der Zahlen 2 und -13 berechnet man durch Subtraktion. Damit das Ergebnis aber nicht negativ wird, verwendet man zusätzlich den Betrag:

$|2-(-13)| = |15| = 15$ oder auch so $|-13-2| = |-15| = 15$

Durch die Verwendung des Betrages ist die Reihenfolge der zu subtrahierenden Zahlen egal.

Die folgende Abbildung stellt die Lösung folgender drei Aufgaben dar:

1. Welche Zahlen haben von der Zahl 2 den Abstand 15?
2. Welche Zahlen haben von der Zahl 2 einen Abstand kleiner als 15?
3. Welche Zahlen haben von der Zahl 2 einen Abstand größer als 15?



Frage 1: kann man als Betragsgleichung $|x-2| = 15$ schreiben. $\mathbf{L} = \{-13\,;17\}$

Frage 2: kann man als **Betrags-Kleiner-Ungleichung** schreiben: $|x-2| < 15$
Ihre Lösungsmenge ist $L =]-13\,;17[$, was zu $-13 < x < 17$ gehört.
Also sind das gleichwertige Ungleichungen. $-13 < x < 17 \Leftrightarrow |x-2| < 15$

Frage 3: kann man als **doppelte Betrags-Größer-Ungleichung** schreiben: $|x-1| > 15$.
Ihre Lösungsmenge ist $\mathbf{L} =]-\infty\,;-13[\,\cup\,]17\,;\infty[$. Sie besteht aus dem „Außenbereich", der zwei Intervalle vereinigt: Der linke Außenbereich ist $]-\infty\,;-13[$ und beinhaltet alle reellen Zahlen, die kleiner als -13 sind. Der rechte Außenbereich ist $]17\,;\infty[$ und enthält alle reellen Zahlen die größer als 17 sind.
Gleichwertig zur Betrags-Größer-Ungleichung ist also $x > 17$ oder $x < -13$

Das ist die sogenannte „positive" Schreibweise: Es wird notiert, was zur Lösungsmenge gehört. Man kann auch die „negative" Schreibweise einsetzen, die aufschreibt, was nicht zur Lösungsmenge gehört, das sieht dann so aus: $\mathbf{L} = \mathbb{R} \setminus [-13;17]$.
Das Zeichen $\cup$ liest man „vereinigt mit", das Zeichen \ heißt Backslash und wird „ohne" gelesen. Damit haben wir also $L =]-\infty;-13[\cup]17;\infty[= \mathbb{R}\setminus[-13;17]$.

MERKE:

$|x-a| < r \Leftrightarrow a-r < x < a+r$ mit $L =]\,a-r\,;a+r\,[$

$|x-a| > r \Leftrightarrow x < a-r$ **oder** $x > a+r$ mit $\mathbf{L} = \mathbb{R}\setminus[a-r\,;a+r]$

Lösungen der Trainingsaufgaben auf der CD